

کد کنترل

486

F



آزمون (نیمه‌متمرکز) ورود به دوره‌های دکتری - سال ۱۴۰۲

دفترچه شماره (۱)

صبح پنج‌شنبه
۱۴۰۱/۱۲/۱۱«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»
امام خمینی (ره)جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

علوم کامپیوتر (کد ۲۲۴۷)

زمان پاسخ‌گویی: ۱۳۵ دقیقه

تعداد سؤال: ۴۵

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مجموعه دروس تخصصی: - ساختمان داده و الگوریتم - مبانی منطق - مبانی ترکیبیات - جبر خطی عددی - نظریه الگوریتم پیشرفته	۴۵	۱	۴۵

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول زیر، به منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب با شماره داوطلبی با آگاهی کامل، یکسان بودن شماره سندلی خود با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخنامه و دفترچه سؤالات، نوع و کد کنترل درج شده بر روی جلد دفترچه سؤالات و پایین پاسخنامه ام را تأیید می‌نمایم.

امضا:

مجموعه دروس تخصصی (ساختمان داده و الگوریتم - مبانی منطق - مبانی ترکیبیات - جبر خطی عددی - نظریه الگوریتم پیشرفته):

۱- کمترین تعداد مقایسه مورد نیاز برای تعیین اینکه یک عدد صحیح بیش از $\frac{n}{p}$ مرتبه در یک آرایه مرتب از اعداد صحیح به طول n ظاهر می‌شود، از کدام مرتبه است؟

$$\Theta(1) \quad (1) \quad \Theta(\log n) \quad (2)$$

$$\Theta(n) \quad (3) \quad \Theta(n \log n) \quad (4)$$

۲- n آرایه نامرتب A_1, \dots, A_n را در نظر بگیرید (n عددی فرد است). هر کدام از این آرایه‌ها دارای n عنصر متمایز است. هیچ عنصر مشترکی میان هیچ دو آرایه‌ای وجود ندارد. پیچیدگی زمانی الگوریتمی برای محاسبه میانه این آرایه‌ها از چه مرتبه‌ای است؟

$$\Theta(n) \quad (1) \quad \Theta(n \log n) \quad (2)$$

$$\Theta(n^2) \quad (3) \quad \Omega(n^2 \log n) \quad (4)$$

۳- فرض کنید آرایه‌ای از اعداد صحیح $A = [a_1; a_2; \dots; a_n]$ داده شود و یک اندیس (ناشناخته) k وجود دارد به طوری که زیر آرایه $A = [a_1; a_2; \dots; a_k]$ به ترتیب اکیداً افزایشی مرتب شده است و زیر آرایه $A = [a_k; a_{k+1}; \dots; a_n]$ به ترتیب اکیداً نزولی مرتب شده است (یعنی اگر $1 \leq i < j \leq k$ ، آنگاه $a_i < a_j$ و اگر $k \leq i < j \leq n$ ، آنگاه $a_i > a_j$ هدف شما تعیین k است. یک الگوریتم بهینه برای حل این مسئله چه زمان اجرایی دارد؟

$$\Theta(n^2) \quad (1) \quad \Theta(n \log n) \quad (2)$$

$$\Theta(n) \quad (3) \quad \Theta(\log n) \quad (4)$$

۴- کدام یک از موارد زیر درست است؟

(۱) آرایه $A = [10; 3; 5; 1; 4; 2]$ ، یک max heap است.

(۲) هر مسئله محاسباتی با اندازه ورودی n را می‌توان با یک الگوریتمی با زمان چند جمله‌ای برحسب n حل کرد.

(۳) برای تمام توابع مثبت $f(n)$ ، $g(n)$ و $h(n)$ ، اگر $f(n) = O(g(n))$ و $f(n) = \Omega(h(n))$ باشد، آنگاه $g(n) + h(n) = \Omega(f(n))$.

(۴) اگر هر رقم جداگانه در RADIX SORT را با استفاده از INSERTION SORT به جای

COUNTING SORT مرتب کنیم، آنگاه RADIX SORT به درستی کار نمی‌کند. (یعنی خروجی صحیح را

تولید نمی‌کند).

- ۵- کدام یک از عبارات زیر مطمئناً عبارت $f(n) = \Omega(g(n))$ را پشتیبانی می‌کند؟
- (۱) $f(n) \leq 4 \times g(n)$ برای تمام $n \geq 1$
- (۲) $f(n) \geq 4 \times g(n)$ برای تمام $n \geq 136$
- (۳) $f(n) \leq 4 \times g(n)$ برای تمام $n \geq 100$
- (۴) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$
- ۶- کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟
- الف- هر درخت جستجوی دودویی دلخواه با n گره می‌تواند به یک درخت جستجوی دودویی دلخواه دیگر با n گره با انجام عمل $O(n)$ تبدیل شود.
- ب- برای هر دو تابع $f(n)$ و $g(n)$ یکی از سه حالت (۱) $f(n) \in o(g(n))$ ، (۲) $f(n) \in w(g(n))$ و (۳) $f(n) \in \theta(g(n))$ برقرار است.
- (۱) فقط «الف»
- (۲) فقط «ب»
- (۳) هر دو
- (۴) نه «الف» و نه «ب»
- ۷- زمان اجرای الگوریتم زیر از چه مرتبه‌ای است؟ ($x++$ یعنی متغیر x را به اضافه یک کنید).
- ```

i = 1
j = 1
for(i = 0; i < n; i++)
 for(j = i * i * i; j < n * i; j++)
 print("*")

```
- (۱)  $n^2$
- (۲)  $n^{2/5}$
- (۳)  $n^3$
- (۴)  $n^{3/5}$
- ۸- کدام مورد (موارد) زیر درست است؟
- الف- اگر در الگوریتم‌سازی ادغامی (Merge sort)، در هر گام تقسیم، به جای تقسیم هر دسته از اعداد به دو دسته، آنها را به سه دسته تقریباً هم‌اندازه تقسیم کنیم (به عبارت دیگر  $n$  عدد به ۳ دسته تقریباً  $\frac{n}{3}$  تایی و سپس ۹ دسته تقریباً  $\frac{n}{9}$  تایی تقسیم شوند و ...)، الگوریتم حاصل یک الگوریتم مرتب‌سازی است و زمان آن از  $\Theta(n \log n)$  است.
- ب- اگر در الگوریتم مرتب‌سازی ادغامی، در هر گام، اعداد را به دو دسته تقسیم کنیم، به طوری که اندازه یکی از دسته‌ها حدوداً ۵ برابر اندازه دسته دیگر باشد، الگوریتم حاصل یک الگوریتم مرتب‌سازی است و زمان اجرای آن  $\Theta(n \log n)$  است.
- (۱) فقط «الف»
- (۲) فقط «ب»
- (۳) هر دو
- (۴) نه «الف» و نه «ب»

۹-  $n$  عدد طبیعی  $a_1, a_2, \dots, a_n$  داده شده است. با استفاده از جدول درهم‌سازی (Hash Table) قصد داریم دو سؤال زیر را پاسخ دهیم.

الف- آیا  $i$  و  $j$  که  $\frac{a_i}{a_j} = 2$  وجود دارند؟

ب- آیا  $i$  و  $j$  که  $\frac{1}{9} < \frac{a_i}{a_j} < \frac{2}{1}$  وجود دارند؟

امید ریاضی زمان اجرای سریع‌ترین الگوریتم موجود برای حل دو مسئله «الف» و «ب» به ترتیب از راست به چپ از چه مرتبه زمانی است؟ (امید ریاضی زمان اجرای یک الگوریتم، میانگین زمان اجرای آن است.)

(۱)  $n^2, n$

(۲)  $n, n^2$

(۳)  $n, n$

(۴)  $n^2, n^2$

۱۰- همزمان با اجرای الگوریتم جستجوی عمق اول (DFS) روی یک گراف  $n$  رأسی، برای هر رأس دو عدد تولد و مرگ نیز تعیین می‌کنیم. اعداد تولد و مرگ رأس‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند: دو نوع رویداد تعریف می‌کنیم (A) پیمایش هر رأس برای اولین بار، (B) ترک کردن یک رأس برای همیشه. این  $2n$  رویداد را به ترتیب زمان رخ دادن با شماره‌های ۱ الی  $2n$  شماره‌گذاری می‌کنیم. شماره حاصل از مورد A برای رأس  $v$  را عدد تولد  $v$  و شماره حاصل از رویداد (B) برای رأس  $v$  را عدد مرگ  $v$  می‌نامیم. کدام گزاره یا گزاره‌های زیر لزوماً درست است؟

الف- از دو عدد تولد و مرگ هر رأس، دقیقاً یک عدد، فرد است.

ب- حداقل یک رأس وجود دارد که عدد مرگ آن برابر با عدد تولدش به اضافه یک است.

(۱) فقط «الف»

(۲) فقط «ب»

(۳) هر دو

(۴) نه «الف» و نه «ب»

۱۱- یک روش مرتب‌سازی را برای مرتب‌نمودن اعداد کاملاً نامرتب ۱ تا ۱۶ انتخاب نموده‌ایم بعد از انجام چندین مرحله اعداد از چپ به راست به صورت زیر درآمده‌اند، روش مرتب‌سازی کدام است؟

۲, ۵, ۱, ۱۰, ۱۴, ۱۶, ۱۵, ۱۳, ۱۲, ۱۱, ۹, ۸, ۷, ۶, ۴, ۳

(۱) درجی (Insertion)

(۲) انتخابی (Selection)

(۳) حبابی (Bubble)

(۴) سریع (Quick)

۱۲- در صورتی که بخواهیم دنباله مرتب‌شده صعودی در خروجی داشته باشیم، کدام یک از ساختارهای داده‌ای زیر بدون استفاده از ساختار کمکی قادر به انجام آن هستند؟

(۱) درخت Maxheap

(۲) درخت دودویی منظم

(۳) درخت Minheap

(۴) درخت جستجوی دودویی

۱۳- فرض کنیم:

 $G(x)$ : دختر است  $x$  $L(x, y)$ :  $x$  را دوست دارد  $y$ پسر:  $k$  $H(x, y)$ :  $x$  از  $y$  بیزار است

کدام گزینه بهترین ترجمه برای عبارت زیر است؟

«هر دختری که پسر را دوست داشته باشد از هر دختری که پسر او را دوست دارد، بیزار است.»

$$\forall x(G(x) \wedge L(x, k) \rightarrow \forall y(G(y) \wedge L(k, y) \rightarrow H(x, y)) \quad (1)$$

$$\forall x(G(x) \wedge L(x, k) \wedge \forall y(G(y) \wedge L(k, y) \rightarrow H(x, y)) \quad (2)$$

$$\forall x(G(x) \wedge L(x, k) \wedge \forall y(G(y) \wedge L(k, y) \wedge H(x, y)) \quad (3)$$

$$\forall x(G(x) \wedge L(x, k) \rightarrow \forall y(G(y) \wedge L(k, y) \wedge H(x, y)) \quad (4)$$

۱۴- فرض کنیم زبان شامل نماد محمولی دو موضعی  $A$  و نماد تابعی یک موضعی  $f$  است. تعبیری را در نظر می‌گیریم کهدر آن دامنه مجموعه اعداد حقیقی،  $A$  رابطه  $\leq$  و  $f$  تابع  $x^3$  است. از دو دنباله  $S' = \langle s_1, s_2, \dots \rangle$ و  $S = \langle s'_1, s'_2, \dots \rangle$  زیر کدام یک فرمول  $A(f(x_2), x_5)$  را ارضاء (Satisfy) می‌کنند؟

$$1) S = \langle 1, 2, 3, 4, 5, \dots \rangle$$

$$2) S' = \langle 2, 4, 8, 16, 32, \dots \rangle$$

(۲) فقط « $S'$ »(۱) فقط « $S$ »(۴) نه « $S$ » و نه « $S'$ »

(۳) هر دو

۱۵- فرض کنیم زبان شامل ثابت‌های  $C_1, C_2, C_3, C_4$ ، نماد محمولی دو موضعی  $A_2$  و نماد محمولی سهموضعی  $A_3$  و نمادهای محمولی یک موضعی  $B_1$  و  $B_2$  باشد. اگر  $b_i$ ها متمایز باشند تعبیر زیر را در نظر

می‌گیریم:

$$I(C_1) = b_1, I(C_2) = b_2, I(C_3) = b_3, I(C_4) = b_4$$

$$I(A_2) = \{(b_1, b_1), (b_1, b_2), (b_3, b_4), (b_3, b_2)\}$$

$$I(A_3) = \{(b_1, b_1, b_3), (b_4, b_2, b_3)\}$$

$$I(B_1) = \{b_1, b_3\}$$

$$I(B_2) = \{b_2, b_3\}$$

فرض کنیم:

$$\alpha = \forall x(B_1(x) \wedge B_2(x) \rightarrow \exists y A_2(y, y, x))$$

$$\beta = \exists y(A_2(C_3, y) \wedge \neg B_2(y) \wedge B_1(y))$$

کدام یک از دو فرمول  $\alpha$  و  $\beta$  در  $I$  درست است؟(۲) فقط « $\beta$ »(۱) فقط « $\alpha$ »(۴) نه « $\alpha$ » و نه « $\beta$ »

(۳) هر دو

۱۶- فرض کنیم  $G$  فرمولی باشد که جدول ارزش آن به ازای مقادیر نشان داده شده در زیر نادرست و در بقیه موارد ارزش درست دارد.

| p | q | r | G |
|---|---|---|---|
| T | F | T | F |
| T | F | F | F |
| F | F | T | F |

از دو مورد زیر کدام درست است؟

(الف) فرم نرمال فصلی (DNF)  $\neg G$  به صورت  $(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$  است.

(ب) فرم نرمال عطفی (CNF) برای  $G$  به صورت  $(\neg p \vee q \vee \sim r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \sim r)$  است.

(۱) فقط «الف» (۲) فقط «ب»

(۳) هر دو (۴) نه «الف» و نه «ب»

۱۷- فرض کنیم  $T_1 = Th(\mathbb{N}, 0, +)$  و  $T_2$  همان  $T_1$  است با این تفاوت که نمادهای محمولی زیر به آن اضافه شده اند:

- یک نماد محمولی دوموضعی  $<$  به طوری که  $ij <$  درست است اگر و تنها اگر  $i < j$ .

- یک محمول یک موضعی  $e$  به طوری که  $e(i)$  اگر و تنها اگر  $i$  زوج باشد.

- یک محمول یک موضعی  $p$  به طوری که  $p(i)$  اگر و تنها اگر  $i$  یک توان از ۲ باشد.

کدام یک از دو نظریه  $T_1$  و  $T_2$  تصمیم پذیر (decidable) است؟

(۱) فقط « $T_1$ » (۲) فقط « $T_2$ »

(۳) هر دو (۴) نه « $T_1$ » و نه « $T_2$ »

۱۸- اگر قوانین  $p \rightarrow \neg \neg p$  و  $p \vee \neg p$  را از منطق کلاسیک حذف کنیم به منطق شهودی گزاره ها می رسیم.

از دو گزاره  $\alpha$  و  $\beta$  زیر کدام یک در منطق شهودی گزاره ها قابل اثبات نیست؟

$$\beta \equiv \neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi$$

$$\alpha \equiv \neg(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\neg \varphi \wedge \neg \psi)$$

(۱) فقط « $\alpha$ » (۲) فقط « $\beta$ »

(۳) هر دو (۴) نه « $\alpha$ » و نه « $\beta$ »

۱۹- استدلال زیر در سیستم استنتاج طبیعی را در نظر بگیرید:

$$\frac{[\forall y \neg Pay]_{\forall E}}{\neg Pab}$$

$$\frac{[Pab]}{Qab} \neg E$$

$$\frac{}{Pab \rightarrow Qab} \rightarrow I$$

$$\frac{\forall y (pay \rightarrow Qay) \quad \forall x \neg \forall y (Pxy \rightarrow Qxy)_{\forall E}}{\neg \forall y (Pay \rightarrow Qay)} \neg I$$

$$\frac{\neg \forall y \neg Pay}{\forall x \neg \forall y \neg Pxy} \forall I$$

چند مورد استفاده اشتباه از قوانین در این استدلال وجود دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲

(۳) ۳ (۴) صفر

۲۰- فرض کنیم  $P_n$  تعداد جایشگت‌های مانند  $f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  باشد به طوری که  $f^2$  (ترکیب  $f$  با خودش) تابع همانی شود. به عبارت دیگر  $f^2$  هر عدد را به خودش می‌برد. مقدار  $P_8$  کدام است؟

(۱) ۲۵

(۲) ۲۶

(۳) ۴۰

(۴) ۴۱

۲۱- فرض کنید  $a_n$  تعداد دنباله‌های به طول  $n$  با نمادهای  $0$  و  $1$  باشد که یا با دو صفر شروع شود یا با سه یک تمام شود. مقدار  $a_7$  کدام است؟

(۱) ۴۲

(۲) ۴۴

(۳) ۴۶

(۴) ۴۸

۲۲- فرض کنیم  $G$  یک گراف است که مجموعه رأس‌های آن تمام زیرمجموعه‌های  $\{1, 2, 3, 4\}$  است و دو زیرمجموعه  $X$  و  $Y$  مجاورند اگر و تنها اگر تفاضل متقارن آنها دقیقاً یک عضو داشته باشد. دو عبارت زیر را در نظر بگیرید:

«الف»  $G$  دور اولبری دارد.  
«ب»  $G$  دور همیلتونی دارد.

از موارد «الف» و «ب» کدام یک صحیح است؟

(۱) فقط «الف»

(۲) فقط «ب»

(۳) هر دو

(۴) نه «الف» و نه «ب»

۲۳- دنباله زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i a_{n-i-1} \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

تعداد جملات فرد در ۱۰۰ جمله نخست این دنباله (یعنی  $a_0$  الی  $a_{99}$ ) را  $N$  می‌نامیم.  $N$  در چه بازه‌ای قرار دارد؟(۱)  $[1, 8)$ (۲)  $[9, 15)$ (۳)  $[16, 34)$ (۴)  $[35, 100]$ 

۲۴- کدام گزاره یا گزاره‌ها درست است؟

گراف منتظم یعنی گرافی که درجه همه رأس‌های آن یکسان است. همچنین یک تطابق کامل در یک گراف یعنی زیرمجموعه‌ای مانند  $M$  از یال‌های گراف به طوری که هر رأس گراف دقیقاً به یک یال از  $M$  متصل باشد.

الف- اگر یال‌های یک گراف به تطابق‌های کامل افزاز شود، آن گراف، منتظم است.

ب- هر گراف منتظم با زوج رأس و به جز گراف تهی، دارای تطابق کامل است.

(۱) فقط «الف»

(۲) فقط «ب»

(۳) هر دو

(۴) نه «الف» و نه «ب»

۲۵- چند عدد ۱۳ رقمی مانند  $k$  با ارقام ۱، ۲ و ۳ وجود دارد، به طوری که اختلاف هر دو رقم مجاور در  $k$  برابر با یک باشد؟

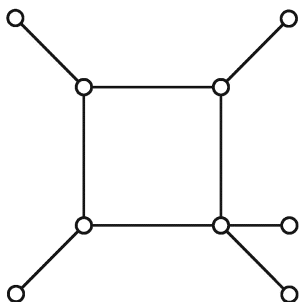
(۱)  $2^6$

(۲)  $2^7$

(۳)  $2^6 \times 3$

(۴)  $2^{12} \times 3$

۲۶- به چند طریق می توان رأس های گراف زیر را به ۳ زیرمجموعه افراز کرد، به طوری که میان هیچ دو رأسی از یک زیرمجموعه، یال موجود نباشد؟



(۱)  $2^6$

(۲)  $3 \times 2^5$

(۳)  $3 \times 2^6$

(۴)  $3^2 \times 2^6$

۲۷- به چند طریق می توان  $\{1, 2, 3, \dots, 30\}$  را به ۵ زیرمجموعه ۶ عضوی افراز کرد و سپس از هر زیرمجموعه، مانند  $A$  یک نماینده  $a \in A$  انتخاب کرد؟

(۱)  $\frac{30!}{(5!)^5}$

(۲)  $\frac{30!}{(6!)^5}$

(۳)  $\frac{30!}{(6!)^5} \times 5!$

(۴)  $\frac{30!}{(5!)^5} \times 6!$

۲۸- تعداد جواب های صحیح معادله  $\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_9 = 100 \\ \forall i \quad x_i \geq 3 \end{cases}$ ، کدام است؟

(۱)  $\binom{82}{8}$

(۲)  $\binom{82}{9}$

(۳)  $\binom{81}{8}$

(۴)  $\binom{81}{9}$



۲۹- فرض کنید  $H = I - \frac{uu^T}{\beta}$  که در آن،  $\beta = \frac{1}{\gamma} \|u\|_p^2$  و  $u \in \mathbb{R}^n$  و  $u \neq 0$  و  $a, b \in \mathbb{R}^n$ . گزینه درست کدام است؟

$$(1) Ha = b \Rightarrow a = Hb$$

$$(2) \|Ha\|_p = \|a\|_p \text{ اگر و تنها اگر } u^T a = 0$$

$$(3) \|H(a-b)\|_p = 0 \text{ به ازای برخی } a \neq b$$

$$(4) \|Ha\|_p = \|Hb\|_p \text{ به ازای برخی } a \text{ و } b \text{ به طوری که } \|a\|_p \neq \|b\|_p$$

۳۰- فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $m \times n$  با ستون‌های مستقل خطی است، و تجزیه QR برای  $A$  به صورت  $A = QR$  با  $Q$  متعامد نرمال و  $R$  بالا مثلثی با ستون‌های مستقل خطی در دست است. در این صورت، مسئله  $\min_x \|Ax - b\|_p$

.....

(۱) می‌تواند جواب نداشته باشد.

(۲) می‌تواند بی‌نهایت جواب داشته باشد.

(۳) را می‌توان با حل یک دستگاه مثلثی، حل کرد.

(۴) جوابی دارد که جواب دستگاه  $Ax = b$  نیز هست.

۳۱- فرض کنید در روش توانی برای یک ماتریس متقارن  $A$  به صورت  $X^{(k)} = AX^{(k-1)}$ ،  $k = 1, 2, \dots$  داریم:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{X^{(k)T} X^{(k-1)}}{X^{(k-1)T} X^{(k-1)}} > 0 \text{ . گزینه نادرست، کدام است؟}$$

(۱)  $A$  می‌تواند تکین باشد.

(۲)  $A$  معین مثبت است.

(۳)  $A$  می‌تواند ماتریسی نامعین باشد.

(۴) بردارهای ویژه  $A$  دو به دو متعامدند.

۳۲- فرض کنید  $\bar{X} \neq 0$  جواب محاسبه شده برای حل یک دستگاه معادلات خطی به صورت  $Ax = b$  باشد. اگر عدد

حالت  $A$  برابر با  $10^7$  و روند عدد یک مربوط به ماشین محاسبه برابر با  $10^{-10}$  باشد، آنگاه تعداد ارقام قابل اعتماد

در  $\bar{X}$  تقریباً برابر با کدام است؟

(۱) ۳

(۲) ۷

(۳) ۹

(۴) ۱۰

۳۳- فرض کنید تجزیه QR برای ماتریس  $A$  به صورت  $A = QR$  در دست است که در آن،  $Q$  یک ماتریس متعامد

نرمال و  $R$  بالا مثلثی با ستون‌های مستقل خطی است. مسئله  $\min_x \|Ax - b\|_p$ ، ..... به دست می‌آید.

(۱) جوابی یکتا دارد که با حل دو دستگاه مثلثی

(۲) جوابی یکتا دارد که با حل یک دستگاه مثلثی

(۳) بی‌نهایت جواب دارد و یک جواب آن با حل یک دستگاه مثلثی

(۴) بی‌نهایت جواب دارد و یک جواب آن با حل دو دستگاه مثلثی

۳۴- فرض کنید  $\lambda_i$  ها مقادیر ویژه یک ماتریس حقیقی  $A, n \times n$  هستند به طوری که  $|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ . در این صورت، مقدار عدد حالت  $A$  در نرم اقلیدسی، کدام است؟ (  $\|A^{-1}\|_p \cdot \|A\|_p =$  عدد حالت  $A$  )

$$(1) \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_n} \right|^{\frac{1}{2}}$$

$$(2) \frac{|\lambda_n|}{|\lambda_1|}$$

$$(3) |\lambda_1 \cdot \lambda_n|$$

$$(4) \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|}$$

۳۵- فرض کنید  $b$  در فضای یوچ ماتریس  $A$  قرار دارد. گزینه درست برای جواب مسئله  $R = \min_x \|Ax - b\|_p$ ، کدام است؟

(۱) جواب ندارد.

(۲) بی‌نهایت جواب دارد.

(۳)  $x = 0$  با  $R = \|b\|_p$ .

(۴) جواب دستگاه  $Ax = b$  با  $R = 0$ .

۳۶- کدام یک از گزاره‌های (های) زیر در مورد مسئله فروشنده دوره‌گرد (Traveling Salesman Problem) درست است؟

الف- دارای الگوریتم چند جمله‌ای یا ضریب تقریب (factor) ثابت است.

ب- اگر ورودی مسئله را به گراف‌هایی محدود کنیم که وزن هر یال آنها بین ۲ و ۵ است، دارای الگوریتم چند جمله‌ای با ضریب تقریب (factor) ثابت است.

(۱) فقط «الف»

(۲) فقط «ب»

(۳) هر دو

(۴) نه «الف» و نه «ب»

۳۷- کدام یک از گزاره‌های (های) زیر درست است؟

الف- اگر یک الگوریتم زمان چند جمله‌ای برای یک مسئله که NP-hard است ارائه شود، آنگاه می‌توان نتیجه گرفت  $P = NP$  است.

ب- اگر یک مسئله NP-complete است، آنگاه می‌توان نتیجه گرفت که آن مسئله هیچ راه‌حلی ندارد.

(۱) فقط «الف»

(۲) فقط «ب»

(۳) هر دو

(۴) نه «الف» و نه «ب»

۳۸- قصد داریم با الگوریتم مرتب‌سازی تصادفی سریع (Randomized Quick Sort) دنباله ۱ و ۳ و ۲ را مرتب و

تبدیل به ۳ و ۲ و ۱ کنیم. به طور متوسط چند مقایسه انجام می‌شود؟

$$(1) \frac{2}{3}$$

$$(2) \frac{5}{3}$$

$$(3) \frac{6}{3}$$

$$(4) \frac{8}{3}$$

۳۹- کدام گزاره یا گزاره‌ها درست است؟

الف- یک الگوریتم برخط (Online) می‌تواند تصادفی باشد.

ب- زمان یک الگوریتم برخط می‌تواند چندجمله‌ای نباشد.

(۱) فقط «الف» (۲) فقط «ب»

(۳) هر دو (۴) نه «الف» و نه «ب»

۴۰- چند تا از گزاره‌های زیر حتماً درست است؟

الف-  $RP \subseteq P$

ب-  $NP \cap P = \emptyset$

ج- اگر یک مسئله، محاسبه‌پذیر باشد، در کلاس NP قرار می‌گیرد.

(۱) ○

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

۴۱- کدام مسئله یا مسائل دارای الگوریتم حریصانه (greedy) با زمان چندجمله‌ای است؟

الف- فروشنده دوره‌گرد (TSP)

ب- سنگین‌ترین زیردرخت پوشا (فراگیر) (MST)

(۱) فقط «الف» (۲) فقط «ب»

(۳) هر دو (۴) نه «الف» و نه «ب»

۴۲- زمان اجرای چه تعداد از الگوریتم‌های زیر، لزوماً چند جمله‌ای است؟

الف- پویا (Dynamic)

ب- حریصانه (greedy)

ج- برخط (Online)

(۱) ○

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

۴۳- کدام یک از گزاره یا گزاره‌های زیر، درست است؟

الف- اگر یک مسئله دارای الگوریتم تقریبی (تخمینی - Approximation) با ضریب تقریب (factor)  $\frac{5}{2}$  باشد،

دارای الگوریتم تقریبی با ضریب تقریب ۲ نیز هست.

ب- برخی مسائل تصمیم‌گیری (مسائل بله - خیر) دارای الگوریتم تقریبی با ضریب تقریب ۲ هستند.

(۱) فقط «الف» (۲) فقط «ب»

(۳) هر دو (۴) نه «الف» و نه «ب»

۴۴- در یک الگوریتم از یک آرایه دو بعدی  $a[n, n]$  استفاده کرده‌ایم ( $n =$  اندازه ورودی) همچنین داریم  $a[i, j] = 0$   $\forall i, j, i > j$ ، همچنین به ازای هر  $i$ ، مقدار  $a[i, i]$  در زمان  $O(i)$  قابل محاسبه است و نیز داریم  $a[i, j] = f(a[i+1, j], a[i, j-1])$  که  $\forall i, j, i < j$  که  $f$  یک تابع قابل محاسبه در زمان  $O(1)$  است. خروجی مسئله نیز  $a[n, n]$  است. کدام عنوان برای نوع این الگوریتم مناسب‌تر است؟

(۱) پویا (Dynamic)

(۲) برخط (Online)

(۳) حریصانه (Greedy)

(۴) بهینه‌سازی

۴۵- کدام گزاره یا گزاره‌ها درست است؟

الف- طبق تز چرچ - تورینگ، همه مسائل توسط ماشین‌های تورینگ قابل محاسبه هستند.

ب- طبق تز چرچ - تورینگ، اگر  $NP = P$  همه مسائل توسط ماشین‌های تورینگ قابل محاسبه هستند.

(۲) فقط «ب»

(۱) فقط «الف»

(۴) نه «الف» و نه «ب»

(۳) هر دو